$\boxed{22.2}$ Die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

Notation:
$$\begin{cases} U \subset \mathbb{C} \text{ offen}, \quad z = x+iy \in U, \\ f: U \to \mathbb{C}, \; f(z) = f(x+iy) \\ \quad = u(x,y) + i\,v(x,y) \end{cases}$$

partielle Ableitungen (Schreibweisen):
$$\begin{cases} u_x := \frac{\partial}{\partial x} u \qquad u_y := \frac{\partial}{\partial y} u \\ v_x := \frac{\partial}{\partial x} v \qquad v_y := \frac{\partial}{\partial y} v \end{cases}$$
(bzw. $\frac{\partial u}{\partial x}$, etc.)

Zur Erinnerung: Die Fkt. $f(z) := \overline{z}$ $= x + i(-y)$ ist $\boxed{\text{nicht}}$ komplex diff'bar,

aber u_x, u_y, v_x, v_y existieren überall!

($u_x = 1$, $u_y = 0$; $v_x = 0$, $v_y = -1$)

Wie hängen reelle und komplexe Differenzierbarkeit nun genau zusammen?

Idee: Sei f als Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diff'bar. Man schreibt jetzt

$$f(z) = f(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ Vektor in $\mathbb{R}^2$

Sei $z_0 \in \mathbb{R}^2$ fixiert, $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$;

Kapitel 17.2 $\Longrightarrow$ Entwicklung

$$f(z) = f(z_0) + \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(z_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \dots$$

(für z nahe z_0)

$\uparrow$ Jacobi-Matrix (2×2)

Mit den Abkürzungen von eben

$$f_x = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}, \quad f_y = \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ bzw. } \mathbb{C}$$

folgt dann durch Ausrechnen die Identität in $\mathbb{C}$

$$f(z) = f(z_0) + f_x(z_0)\,(x - x_0) +$$

$$f_y(z_0)\,(y - y_0) + \ldots\ldots$$

beachte:

$$\boxed{\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{1}{2}\left(z - z_0 + \overline{z - z_0}\right), \\ y - y_0 &= -\frac{i}{2}\left(z - z_0 - \overline{z - z_0}\right) \end{aligned}}$$

(Darstellung von Re und Im komplexer Zahlen)

Einsetzen in obige Formel $\Longrightarrow$

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2} f_x(z_0) \underbrace{\left(z - z_0 + \overline{z - z_0}\right)}_{\in \mathbb{R}\,!}$$

$$- \frac{i}{2} f_y(z_0) \left(z - z_0 \cancel{+} - \overline{z - z_0}\right) + \ldots\ldots$$

(1)

„ordnen"

$$= f(z_0) + \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) - i f_y(z_0)\right)(z - z_0)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + i f_y(z_0)\right)\overline{(z - z_0)} + \ldots$$

Ist also f in z_0 reell diff'bar, so folgt die Darstellung (1).

Existiert nun die komplexe Ableitung $f'(z_0)$, so folgt die Entwicklung in $\mathbb{C}$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \ldots\ldots,$$

Vergleich mit (1) ergibt: (schaue nach den Vorfaktoren bei $z - z_0$, $\overline{z - z_0}$)

$$\boxed{\begin{aligned} &(2) \quad f'(z_0) = \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) - i f_y(z_0)\right) \\ &(3) \quad 0 = f_x(z_0) + i f_y(z_0) \end{aligned}}$$

Bedeutung:

(2) ist eine Formel für die komplexe Ableitung in Termen der reellen partiellen Ableitungen.

(3) ist eine Relation zwischen den reellen partiellen Ableitungen, die im Falle der komplexen Diff'barkeit zusätzlich erfüllt sein muss.

! Die Gleichungen (3) sind die Differentialgleichungen von Cauchy-Riemann.

Umformulierung von (3):
(in Form 2er reeller Gleichungen)

Mit $f_x = u_x + i v_x$, $f_y = u_y + i v_y$

ist

$$f_x + i f_y =$$

$$u_x - v_y + i(v_x + u_y)$$

Somit gilt:

Die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen (3) lauten äquivalent

$$\boxed{u_x = v_y \,, \quad u_y = -v_x} \quad (*)$$

Wir halten fest:

Satz 22.2.1 Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$. Für eine Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

1.) die komplexe Ableitung $f'(z_0)$ existiert

2.) f ist im reellen Sinn in z_0 ableitbar, und die partiellen Ableitungen erfüllen die C.-R. Differentialgleichungen (*)

Prinzip:

Gültigkeit von C.-R. auf $U \Longrightarrow$ Holomorphie auf U

Anwendungen:

i) $\boxed{f(z) = z^2 + iz, \quad z \in \mathbb{C}}$

a) direkte Rechnung (mit „Rechenregeln")

$\Longrightarrow$ f holomorph auf $\mathbb{C}$

b) alternativ mit C.-R.:

$$z^2 + iz = (x+iy)^2 + i(x+iy) =$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy + ix - y =$$

$$\underbrace{x^2 - y^2 - y}_{=:u(x,y)} + i\underbrace{[x + 2xy]}_{=:v(x,y)}$$

$$u_x(x,y) = 2x, \quad v_y(x,y) = 2x,$$

$u_y(x,y) = -2y-1\,,\ v_x(x,y) = 1+2y$

ii) unser „Gegenbeispiel": $f(z) := \overline{z}$

$f(z) = x - iy \Rightarrow u(x,y) = x,\ v(x,y) = -y$

und daher

$$\begin{cases} u_x \equiv 1 \neq v_y \equiv -1\,; \\ u_y \equiv 0\,,\ v_x \equiv 0 \end{cases}$$

iii) „<u>Funktionen mit nur reellen Werten</u>"

z.B. : $f(z) := \operatorname{Im} z \underline{\underline{(=y)}} \Longrightarrow$

$v(x,y) \equiv 0\,,\ u(x,y) = y \Longrightarrow$

$u_x \equiv 0 \,\cancel{\neq}, 1 \equiv u_y\,,$

$v_y \equiv 0 \equiv v_x$ $\square$